

# Le théorème de Hopf-Rinow

Kylian Prigent

March 13, 2026

# Rudiments de géométrie Riemannienne

## Définition : Variété Riemannienne

Une variété Riemannienne est une variété munie d'une métrique Riemannienne  $\rho$ , c'est-à-dire munie pour tout point  $p \in M$  d'un produit scalaire  $\rho_p$  sur  $T_pM$ .

# Rudiments de géométrie Riemannienne

## Définition : Variété Riemannienne

Une variété Riemannienne est une variété munie d'une métrique Riemannienne  $\rho$ , c'est-à-dire munie pour tout point  $p \in M$  d'un produit scalaire  $\rho_p$  sur  $T_pM$ .

## Définition : distance sur $M$

On peut munir une variété Riemannienne  $(M, \rho)$  d'une métrique  $d_\rho$ :

$$d_\rho : \begin{cases} M \times M \rightarrow \mathbb{R} \\ x, y \mapsto \inf (\ell_\rho(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ avec } \gamma(a) = x \text{ et } \gamma(b) = y) \end{cases}$$

# Rudiments de géométrie Riemannienne

## Définition : géodésique

Si  $(M, \rho)$  est une variété Riemannienne et que  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita alors on appelle géodésique une courbe  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  telle que  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ .

# Rudiments de géométrie Riemannienne

## Définition : géodésique

Si  $(M, \rho)$  est une variété Riemannienne et que  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita alors on appelle géodésique une courbe  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  telle que  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ .

Moralement ceci signifie qu'une courbe  $\gamma$  est une géodésique si  $\dot{\gamma}$  est transporté parallèlement le long de  $\gamma$

# Rudiments de géométrie Riemannienne

## Définition : géodésique

Si  $(M, \rho)$  est une variété Riemannienne et que  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita alors on appelle géodésique une courbe  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  telle que  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ .

Moralement ceci signifie qu'une courbe  $\gamma$  est une géodésique si  $\dot{\gamma}$  est transporté parallèlement le long de  $\gamma$

## Proposition : point critique de l'énergie

Les géodésiques sont exactement les points critiques de l'énergie:

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle dt.$$

# Rudiments de géométrie Riemannienne

Pour tout point  $p \in M$  et tout vecteur tangent  $v \in T_pM$  il existe une unique géodésique telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ , on la note  $\gamma_v$ .

Définition : exponentielle au point  $p \in M$

Soit  $p \in M$  et soit  $\mathcal{U} \subset T_pM$  un voisinage ouvert de  $0 \in T_pM$ , l'exponentielle au point  $p$  est:

$$\exp_p : \begin{cases} \mathcal{U} & \rightarrow & M \\ v & \mapsto & \exp_p(v) = \gamma_v(1) \end{cases}$$

# Théorème de Hopf-Rinow

## Théorème : (de Hopf-Rinow)

Soit  $M$  une variété Riemannienne connexe et soit  $p \in M$  un point de la variété. Les assertions suivantes sont équivalentes

- 1  $\exp_p$  est définie sur  $T_p M$
- 2 Les compacts de  $M$  sont ses partie fermées bornées
- 3  $M$  est un espace métrique complet
- 4  $M$  est géodésiquement complet (i.e. les géodésiques se prolongent sur  $\mathbb{R}$ )

et ces assertions impliquent

- 5 Pour tout point  $q \in M$  il existe une géodésique  $\gamma : [0, d(p, q)] \rightarrow M$  telle que:
  - $\gamma(0) = p$
  - $\gamma(d(p, q)) = q$
  - $\ell(\gamma) = d(p, q)$

# Corollaire et Applications

Corollaire :

Si  $M$  est compacte sans bord, alors elle est géodésiquement complète

# Corollaire et Applications

## Corollaire :

Si  $M$  est compacte sans bord, alors elle est géodésiquement complète

## Application : (théorème de Hadamrad-Cartan)

Si  $M$  est complet et de courbure négative  $\kappa_M \leq 0$  alors  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  est un revêtement

## Corollaire et Applications

### Corollaire :

Si  $M$  est compacte sans bord, alors elle est géodésiquement complète

### Application : (théorème de Hadamrad-Cartan)

Si  $M$  est complet et de courbure négative  $\kappa_M \leq 0$  alors  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  est un revêtement

### Application : (applications harmoniques)

Si  $M$  est complet et de courbure négative  $\kappa_M \leq 0$  alors toute application harmonique  $f : \mathbb{S}^k \rightarrow M$  est constante

# Applications aux groupes de Lie

## Application :

Si  $G$  est un groupe de Lie muni d'une métrique Riemannienne bi-invariante (existe toujours si  $G$  est compact)  
alors l'exponentielle au point  $e_G$  et l'exponentielle au sens de la théorie des groupes de Lie coïncident